安定群と可換性論理式のladder index (モデル理論とその応用)

田中, 克己

数理解析研究所講究録 1213 巻 2001 年 1-5

安定群と可換性論理式の ladder index

岡山大学・理・数学　田中 克己 (Katsumi TANAKA)
Dept. of Mathematics, Faculty of Science, Okayama Univ.

1　安定性

1969 年に Shelah が [S] において安定と不安定な理論を区別しました．これはある理論について非可算な κ に対し，濃度 κ の非同形なモデルがいくつ存在するかを調べるために導入された概念です．

T を第 1 階述語言語 L の安定な理論とします．T が不安定とは，L のある論理式 $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ と T のモデル A と $\bar{a}_i \in A$ があって，

$$\forall i, j < \omega, A \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{a}_j) \Longleftrightarrow i < j$$

をみたすこととします．T が安定とは，それが不安定でないこととします．また，構造 A が安定とか不安定とかは $Th(A)$ が各々安定とか不安定のこととします．

定義から分かるとおり，有限な構造はすべて安定となります．ですから，以下では，T は第 1 階述語言語 L の完全な理論で，T のすべてのモデルは無限と仮定します．

定理 1 A を安定とする．
(a) $\bar{a} \in A$ に対し，$(A, \bar{a})$ も安定．
(b) 構造 B が A の中に解釈可能ならば，B は安定．

κ を無限基数とする．T が κ 安定とは，T の任意のモデル A と濃度 $\leq \kappa$ の任意の集合 $X \subset A$ に対し，$|S_1(X; A)| \leq \kappa$ をみたすこととする．ここで $S_1(X; A)$ は X 上の A における complete 1-type の全体の集合とする．構造 A が κ 安定とは，$Th(A)$ が κ 安定のこととする．このとき，次が成り立つ．

定理 2 次は同値になる．
(a) T は安定．
(b) 少なくとも 1 つの無限基数 κ について，T は κ 安定．

補題 3 A を L-構造，κ を無限基数，$X \subset A$ を濃度 κ の集合とする．ある自然数 n に対し，$|S_n(X; A)| > |X|$ となるとき，A は κ 安定ではない．

2 ladder index

ここでは T を言語 L の完全な理論とします．自由変数として $\bar{x}$ 達と $\bar{y}$ 達を含む L の論理式 $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ を考えます．φ の n-**ladder** とは，T のあるモデル A の元対の列 $(\bar{a}_0,\cdots,\bar{a}_{n-1};\bar{b}_0,\cdots,\bar{b}_{n-1})$ で

$$\forall i,j<n,\ A\models\varphi(\bar{a}_i,\bar{b}_j)\Leftrightarrow\ i\leq j.$$

をみたすものとします．φ が安定な論理式とは，ある自然数 n があって，φ の n-ladder が存在しないこととし，そうでないとき不安定とよぶことにします．

補題 4 理論 T が不安定 $\Longleftrightarrow$ T について L の不安定な論理式が存在する．

すべての加群が安定であることは知られています．ここでは，安定な群はある種の極小条件をみたすことを示します．まず，構造 A が **group-like** とは A のある制限が群になることとします．その制限のことを考えて，A の群とよぶことにします．**安定群**とは，安定な group-like な構造のこととします．後には，この定義もより一般化されることと思いますが．

補題 5 (Baldwin-Saxl). L を言語，A を安定群である L-構造とする．G を A の群とする．$\varphi(x,\bar{y})$ を L の論理式とする．$\bar{b}\in A$ のとき，$\varphi(A,\bar{b})$ の形の G の定義可能部分群の全体を S と表すことにする．$\bigcap S$ を S の群の任意個の共通部分達すべての集合とする．このとき，

(a) ある自然数 n があって，$\bigcap S$ の中の任意の群は S のうち高々 n 個の共通部分として表せる．

(b) ある自然数 m があって，$\bigcap S$ の中に m より長い包含関係による下降列は存在しない．

定義 6 モデルに対し φ が *n-ladder* をもたないような最小の n を **ladder index** とよぶ．

このノートでは，主に可換性の論理式 $xy=yx$ についての ladder index を考える．群 G の可換性論理式についての ladder index を $\ell(G)$ で表わすことにする．

注意 7 群 G の *ladder* $(a_0,a_1,\cdots,a_n;b_0,b_1,\cdots,b_n)$ において，a_0 と b_n は G の中心の元で（もちろん 1 で）置き換えたものも *ladder* になっている．

群 G における部分集合 X の中心化群 $C_G(X)$ は X の任意の元と可換な元 $g\in G$ 全体のなす群です．つまり，$C_G(X)=\bigcap_{g\in X}C_G(g)$ です．ここで，$C_G(g)=\varphi(A,g)$ で，$\varphi(x,y)$ は L の論理式 $x\cdot y=y\cdot x$ で表されます．Baldwin-Saxl lemma より，安定群は中心化群の極小条件をみたします．また，中心化群の極小条件をみたす群は M_C-群 とよばれます．

中心化群については，次のことが成り立ちます．

補題 8 群 G とその部分集合 A について，$C_G(C_G(C_G(A)))=C_G(A)$.

補題 9 中心化群について極大条件と極小条件は同値．

3 finite gap number

このセクションでは,(可換性論理式についての) ladder index について述べます.
群論では文献, 例えば [LR] によると, 次のような概念が定義されています.

定義 10 群 G が **finifte central gap number** または単に **finite gap number** をもつとは, G に対しある自然数 g が存在して, G のどんな部分群 $H_1, H_2, \cdots, H_n, \cdots$ をとっても, その中心化群の列

$$C_G(H_1) \leq C_G(H_2) \leq \cdots \leq C_G(H_n) \leq \cdots \tag{1}$$

において, 狭義の包含関係が高々 g 個となることとする.

finite gap number と ladder index の関係を調べるために次のことを準備しておきます.

補題 11 群 G に対しその *finite gap number* n を与える列を

$$C_G(H_0) > C_G(H_1) > \cdots > C_G(H_n)$$

とするとき, G のある元の列, a_i $(0 \leq i \leq n)$ が存在して, $C_G(H_i) = C_G(\{a_0, \cdots, a_i\})$ と表わせる. 以後, $C_G(\{a_0, \cdots, a_i\})$ を $C_G(a_0, \cdots, a_i)$ と表わすことにする.

Proof. $G = C_G(H_0)$ より, $a_0 = 1$ ととる. i 番までできたと仮定する. $H_{i+1} \backslash H_i$ のある元 b が存在して, $C_G(H_i) > C_G(H_i \cup \{b\})$ となる. このとき, 定義から, $C_G(H_i)$ と $C_G(H_{i+1})$ の間には中心化群ははさまれないから, $C_G(H_{i+1}) = C_G(H_i \cup \{b\}) = C_G(a_1, \cdots, a_i, b)$. ここで, $a_{i+1} = b$ ととればよい. □

定理 12 $\ell = g + 2$

Proof. ladder index $n + 2$ の群の最長の ladder を $(a_0, \cdots, a_n; b_0, \cdots, b_n)$ とするとき,

$$C_G(a_0) > C_G(a_0, a_1) > \cdots > C_G(a_1, \cdots, a_n)$$

という下降列ができる. また, 下降列 $C_G(a_0) > C_G(a_0, a_1) > \cdots > C_G(a_1, \cdots, a_n)$ が与えられたとする. この列は狭義の減少列だから, 各 i に対し, $C_G(a_1, \cdots, a_{i+1}) \backslash C_G(a_1, \cdots, a_i)$ から b_i をとる. これで出来る $(a_0, \cdots, a_n; b_0, \cdots, b_n)$ が ladder になっているとは限らない. そこで, b_i 達の取り直しを行う. b_n, b_{n-1} はそのままでよい. b_{n-2} が a_n と非可換のときは, そのままでよい. 可換のときは, $b_{n-2}b_{n-1}$ を新たに b_{n-2} と取り直す.

いま, b_i まで上から構成できたとする. b_{i-1} が a_{i+1} と非可換ならそのままで, 可換のときは, b_{i-1} を $b_{i-1}b_i$ と取り直す. 次に, b_{i-1} が a_{i+2} と非可換ならそのままで, 可換なら $b_{i-1}b_{i+1}$ と取り直す. これを a_n まで続けると, b_{i-1} が取り直せる.

以上より, 新しく取った b_i 達により ladder が完成する. □

4 ladder index の小さい群

すべての有限群は ladder index 有限です．また，アーベル群，線形群 [W]，有限生成の abelian-by-nilpotent groups [LR]，polycyclic-by-finite groups [LR] は ladder index 有限であることが知られています．

ここでは ladder index が 2，3，4，5 の群の考察を行います．

定理 13 $\ell(G) = 2 \Longleftrightarrow G$ はアーベル群

この証明は ladder index の定義から明らかです．つぎは少し驚きの (?) 結果です．

定理 14 $\ell(G) = 3$ となる群 G は存在しない．

Proof. $\ell(G) > 2$ とすると，上の定理から，G はアーベル群でない．よって，非可換な元 a，b が存在する．このとき，$(1, b, ab; a, b, 1)$ は ladder となる．よって，$\ell(G) \geq 4$． □

次に ladder index 4 の群についてですが，有限群，無限群を問わず多くの例があります．その構造は以外と単純です（単純群という訳ではありません）．

例 15 対称群 S_3，二面体群 D_n は *ladder index* 4.

例 16 特殊線形群 $SL(2, F)$ *(* F は体 *)* の *ladder index* は 4.

定理 17 $\ell(G) = 4 \Longleftrightarrow G \setminus Z(G)$ の任意の元 a と b に対し，$C_G(a) \neq C_G(b)$ ならば，$C_G(a) \cap C_G(b) = Z(G)$．

Proof. $(\Leftarrow)$ は明らか．
$(\Rightarrow)$ G の ladder index を 4 とする．いま a と b を上の前提をみたすようにとる．$C_G(a) \setminus C_G(b) \neq \emptyset$ とおく．このとき，$G > C_G(a) > C_G(a, b) \geq Z(G)$ となる．G の finite gap number は 2 だから，$C_G(a, b) = Z(G)$ となる．□

定理 18 $\ell(G) = 5$ となる群 G は存在しない．

Proof. G の ladder index を 4 より大きいとする．上の定理から，$G \setminus Z(G)$ のある元 a_1，a_2 が存在して，$C_G(a_1) \neq C_G(a_2)$ かつ $C_G(a_1) \cap C_G(a_2) \geq Z(G)$ をみたす．

Case 1. $a_1 a_2 = a_2 a_1$ のとき．

$C_G(a_1) \neq C_G(a_2)$ より $C_G(a_1) \setminus C_G(a_2) \neq \emptyset$ と仮定しておく．b をその集合の元とする．

$$a_1 \in C_G(b) \wedge a_2 \notin C_G(b)$$

また，$a_1 \notin Z(G)$ より，$\exists c \in G \setminus C_G(a_1)$，$a_1 \in C_G(c)$．これらから，

$$G > C_G(a_1) > C_G(a_1, a_2) > C_G(a_1, a_2, b) > C_G(a_1, a_2, b, c)$$

これより，$\ell(G) \geq 6$.

Case 2. $a_1a_2 \neq a_2a_1$ のとき．

$\exists b_3 \in C_G(a_1, a_2) \setminus Z(G)$．いま，$b_3 \notin Z(G)$ より，$\exists b_1 \in G \setminus C_G(b_3)$．このとき，

$$G > C_G(b_3) > C_G(b_3, a_1) > C_G(b_3, a_1, a_2) > C_G(b_3, a_1, a_2, b_1)$$

よって，$\ell(G) \geq 6$. □

例 19 対称群 S_4 の *ladder index* は 6.

Conjecture 20 特殊線形群 $SL(3, F)$ の *ladder index* は 6 か？

References

[BS] J.Baldwin and J.Saxl *Logical stability in group theory*, J. Austral. Math. Soc. 21(1976)267-276.

[H] Wilfrid Hodges *Model Theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[LR] J.C.Lennox and J.E.Roseblade *Centrality in Finitely Generated Soluble Groups*, Journal of Algebra 16(1970)399-435

[S] S.Shelah *Stable theories*, Israel J. of Math. 7(1969)187-202.

[W] B.A.F. Wehrfritz *Remarks on Centrality and Cyclicity in Linear Groups*, Journal of Algebra 18(1971)229-236.